Загадка теореми, оберненої до теореми Стюарта

«У величезному саду геометрії кожний може
підібрати собі букет за смаком»
(Д.Гільберт)

Інколи дивуєшся – чому той чи інший вчений займався саме тою чи іншою задачею. Як виникає бажання розглядати якусь проблему, шукати її розв’язки? У переліку причин можна вказати наступні: практична потреба (технічна, економічна, військова та інші), відома нерозв’язана задача, задача, яка запропонована наставником, другом, колегою, «похідна» задача, що виникла при розв’язуванні іншої задачі, проблема, розв’язання якої приведе до просування в уже наміченому напрямку (задача-нащадок), випадково знайдена (сформульована) цікава задача. Але основним джерелом математичних задач є, без сумніву, фахова література. Так поштовхом для написання статті послужив дивний факт – до наших днів було відсутнє доведення (або згадка про це?) теореми, оберненої до теореми Стюарта (1746) [2, стор. 53-57]. Виникла думка знайти інше, альтернативне доведення. Появилася ідея застосувати для дослідження цієї загадки сучасні технічні засоби, яких не було у ті далекі часи. Результат був дуже несподіваним!

Метою статті є показати *ефективність* використання доступних комп’ютерних програмних продуктів на етапі *перевірки гіпотези* розв’язання старої геометричної задачі-невидимки та для отримання *точного* числового розв’язку. Будемо досліджувати теорему, обернену до теореми Стюарта за допомогою таких програмних засобів як Динамічна геометрія та веб-сервісу Wolfram Alpha. Зазначимо, що ці програмні продукти використовувалися на початковому та кінцевому етапах роботи і отримані результати не залежать від їх застосування.

Почнемо з формулювань.

Теорема Стюарта (пряма[3]). Нехай

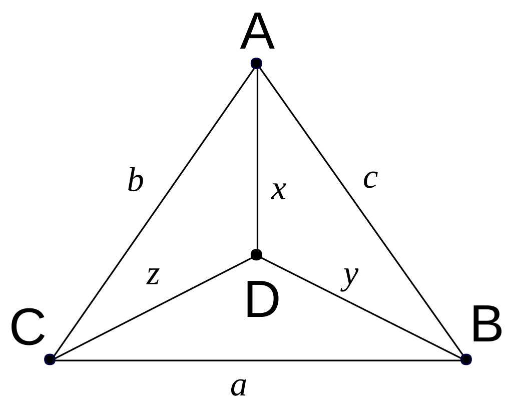
$a = |BC|,\ b = |CA|,\ c = |AB|,\ x = |AD|,\ y = |BD|,\ z = |CD|$.

Тоді (див. мал.1), якщо точка D належить одній із сторін трикутника ABC, то виконується одна із рівностей:

$$D \in BC \to x^2 \cdot a = b^2 \cdot y + c^2 \cdot z - y \cdot z \cdot a, \qquad (1)$$

$$D \in CA \to y^2 \cdot b = c^2 \cdot z + a^2 \cdot x - z \cdot x \cdot b, \qquad (2)$$

$$D \in AB \to z^2 \cdot c = a^2 \cdot x + b^2 \cdot y - x \cdot y \cdot c. \qquad (3)$$



Мал. 1

Теорема, обернена до теореми Стюарта. Якщо виконується одна із рівностей (1)–(3), тоді точка D лежить на відповідній стороні трикутника ABC.

Відмітимо, що доведення цієї теореми [2, стор. 54-57] не містить *жодних* обмежень на розташування точки D у площині трикутника ABC.

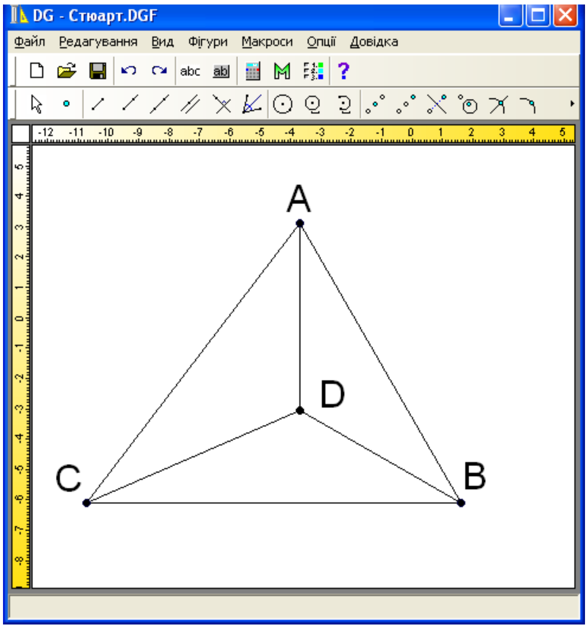
Гіпотеза. Теорема, обернена до теореми Стюарта, не виконується.

Дослідження. Досить побудувати контр-приклад. Покажемо, що у площині деякого трикутника ABC існує точка D для якої рівність (1) має місце, але яка не лежить на відрізку BC.

Відсилаємо читача, якого не цікавить хід роботи, до пункту **Доведення гіпотези**.

Хід роботи. З чого почати? Як шукати точку D? Для проведення пошуку скористаємося відомим пакетом програм “Динамічна геометрія” (“DG”) харківських вчених С.А. Ракова та К.О. Осенкова (http://dg.osenkov.com/).

Після запуску програми DG будуємо довільний трикутник ABC та точку D, відрізки AD, BD, CD (див. мал. 2).



Мал. 2

Припускаючи, що для точки D буде виконуватися рівність (1) дослідимо значення виразу F, який отримаємо із (1) перенесенням всіх доданків з правої частини у ліву:

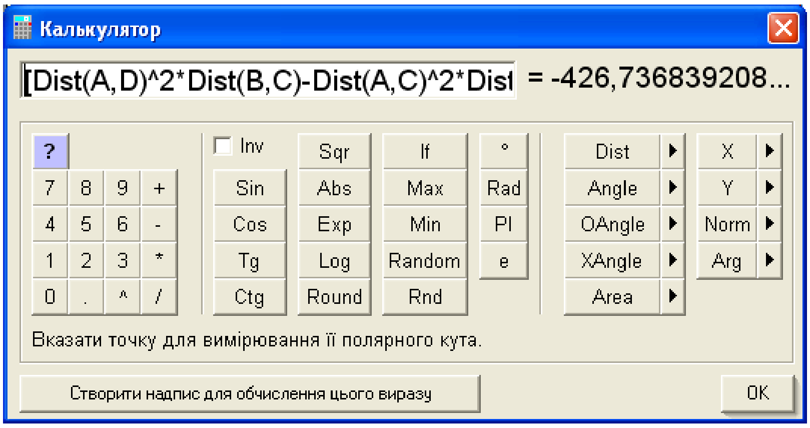
$$F = x^2 \cdot a - b^2 \cdot y - c^2 \cdot z + y \cdot z \cdot a,$$

$$F = |AD|^2 \cdot |BC| - |AC|^2 \cdot |DB| - |AB|^2 \cdot |DC| + |DB| \cdot |DC| \cdot |BC| \, .$$

Зрозуміло, що для всіх $\mathrm{D} \in \mathrm{BC}$ маємо $\mathrm{F} = 0$ (відповідно до теореми Стюарта). Якщо ж значення виразу F є рівним нулю, тоді для точки D виконується рівність (1). Для нашої мети потрібно обчислювати значення F для різних положень точки D у випадку, коли вона не лежить на відрізку BC.

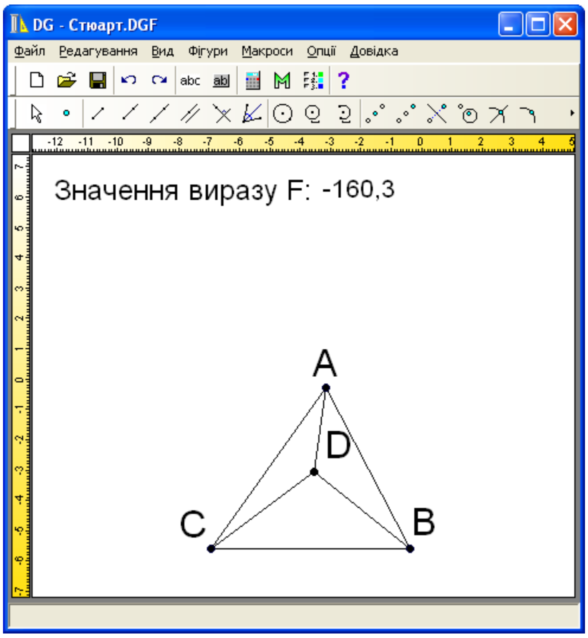
Програма DG має вбудовану можливість відображати результати вимірювань відрізків, кутів, площ і обчислень, заданих *формулами* (пункт «Калькулятор»). Наприклад, відстань між двома точками A і D задається виразом $\mathrm{Dist(A,D)}$, піднесення виразу до квадрату – ^2, дія множення – $*$. Запустимо «Калькулятор» і введемо для обчислень вираз (див. мал. 3):

[Dist(A,D)^2*Dist(B,C)-Dist(A,C)^2*Dist(D,B)-Dist(A,B)^2*Dist(D,C)+
+Dist(D,B)*Dist(D,C)*Dist(B,C)]



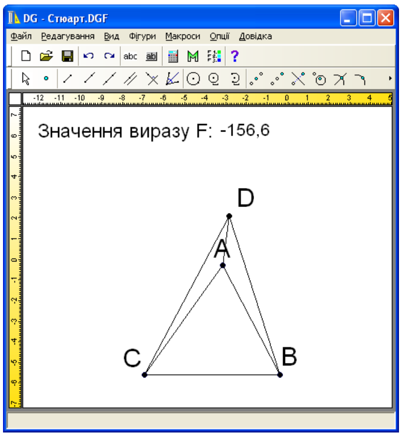
Мал. 3

Створимо напис для відображення значень виразу F у вікні програми:

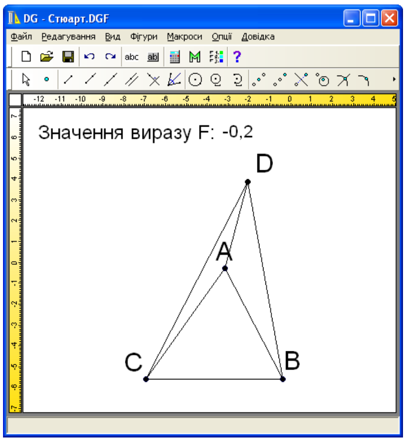


Мал. 4

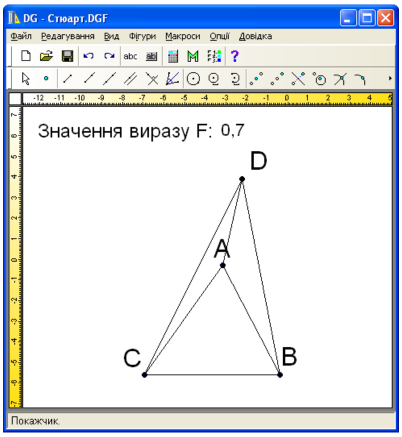
Програма дозволяє плавно переміщувати точку D у площині трикутника і при цьому обчислювати значення виразу F для нового положення точки. Будемо змінювати розміщення точки D за допомогою маніпулятора «мишка», слідкуючи за значенням виразу F. Наведемо малюнки (мал.5, мал. 6, мал. 7), які ілюструють наше дослідження:



Мал.5



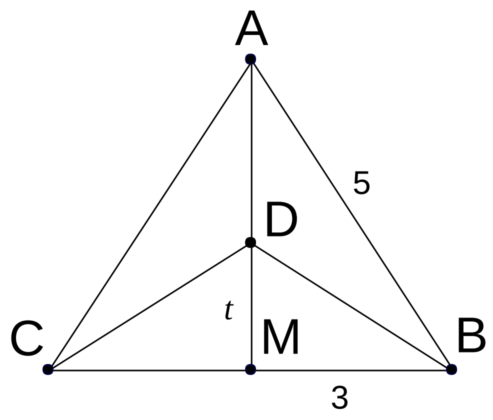
Мал. 6



Мал. 7

Можемо зробити попередній висновок про те, що значення виразу F при переміщенні точки D (збільшенні довжини відрізка AD та відстані точки до прямої CB) змінюється з від’ємного (мал. 5 «-156,6»; мал. 6 «-0,2») на додатній (мал. 7 «0,7»). Як показали подальші дослідження, знайти таким способом положення точки D, при якому строго F=0 було практично неможливо, так як вимагало точності розміщення точки D, які перевищували роздільну здатність монітора. Рамки статті не дозволяють привести інші ілюстрації проведеного дослідження, але при зміні виду трикутника знаходилися положення точки D, при яких значення виразу F міняло знак і відрізнялося від нуля на $\pm 0{,}2$. Тому логічно було припустити, що, *незалежно від виду трикутника*, існує положення точки D, при якому $\mathrm{F} = 0$. Це спостереження *дозволило спростити* доведення через використання спеціально підібраного рівнобедреного трикутника та розміщення точки D.

Доведення гіпотези. Для спрощення обчислень розглянемо випадок, коли $|AB| = |AC| = 5$, $|BC| = 6$, точка M – середина відрізка BC і точка D лежить на промені MA (див. мал. 8):



Мал. 8

Очевидно $|BM| = |MC| = 3,\ |AM| = 4$. Позначимо $|DM| = t$. Тоді

$$|AD| = |t - 4|, |DC| = |DB| = \sqrt{t^2 + 9}.$$

Розглянемо функцію, побудовану на основі рівності (1):

$$F(t) = |AD|^2 \cdot |BC| - |AB|^2 \cdot |DC| - |AC|^2 \cdot |DB| + |BC| \cdot |DB| \cdot |DC|,$$

$$F(t) = (t - 4)^2 \cdot 6 - 5^2 \cdot \sqrt{t^2 + 9} - 5^2 \cdot \sqrt{t^2 + 9} + 6 \cdot \sqrt{t^2 + 9} \cdot \sqrt{t^2 + 9}.$$

Після спрощень, отримаємо:

$$F(t) = 12 \cdot t^2 - 50 \cdot \sqrt{t^2 + 9} - 48 \cdot t + 150.$$

Якщо обернена теорема Стюарта має місце, тоді рівняння

$$F(t) = 0 \qquad (4)$$

має тільки один дійсний корінь $t = 0$.

Покажемо, що існує додатній корінь рівняння (4). Так як функція $F(t)$ – неперервна, то достатньо знайти такі числа $0 < t_1 < t_2$, що $F(t_1) < 0$ і $F(t_2) > 0$. Тоді існує $t_0,\ t_1 < t_0 < t_2$, що $F(t_0) = 0$.

Легко обчислити, що $F(6) < 0$ і $F(8) > 0$. Отже, існує точка D (див. також примітку 2), яка лежить на промені MA (точка A належить відрізку MD), $|AD| = t_0 - 4,\ 6 < t_0 < 8$, для якої має місце рівність (1), але яка не лежить на відрізку BC.

Висновок. Провівши дослідження нашої гіпотези ми отримали доведення

Твердження. Обернена теорема Стюарта не вірна.

Примітки. 1) Відмітимо, що точка D не є *внутрішньою* точкою трикутника ABC.

2) Приведемо розв'язки рівняння (4), отримані за допомогою відомого веб-сервісу Wolfram Alpha (www.wolframalpha.com):

$t = 0,$

$$t = \frac{1}{6}\left(16 + \frac{\sqrt[3]{72792+625\sqrt{13569}}}{3^{2/3}} - \frac{83}{\sqrt[3]{3(72792+625\sqrt{13569})}}\right).$$

Виникають нові задачі та гіпотеза:

а) Знайти геометричне місце всіх точок у площині трикутника, для яких виконуються рівності (1)-(3), але які не належать відповідним сторонам трикутника.

б) При яких додаткових умовах виконується теорема, обернена до теореми Стюарта?

в) Гіпотеза. Теорема, обернена до теореми Стюарта, вірна для внутрішніх точок трикутника.

Отриманий результат пояснює також загадку щодо відсутністі доведення теореми, оберненої до теореми Стюарта впродовж більше як 250 років.

Література

1. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, И.И.Юдина. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс // Изд-во Вита-Пресс. — 2004. — С. 53.
2. Д.П. Мавло. Теорема, обратная теореме Стюарта // Математика в школах України. — 2016. — №28-29(508-509). — С. 53-57.
3. Stewart M. Some General Teorems of Consideradle Use in the Higher Parts of Mathematics. – Edinburg, 1746.